史密斯(Smith)圆图知识

史密斯圆图

史密斯圆图是由很多圆周交织在一起的一个图。正确的使用它，可以在不作任何计算的前提下得到一个表面上看非常复杂的系统的匹配阻抗，唯一需要作的就是沿着圆周线读取并跟踪数据。

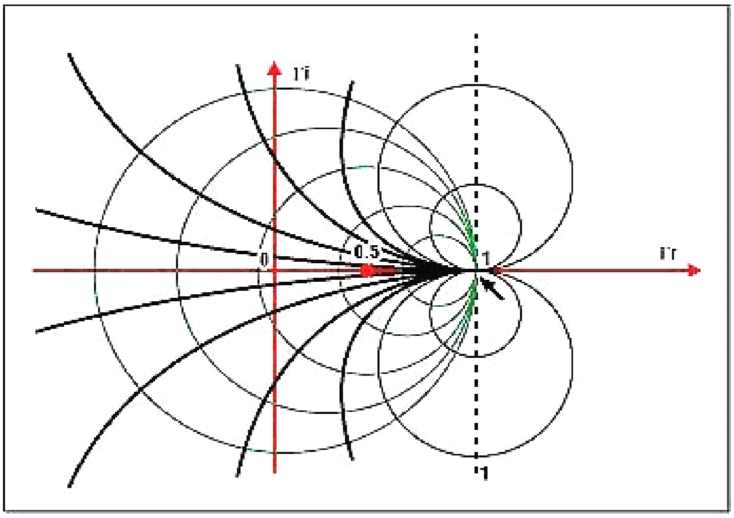

图 1. 阻抗和史密斯圆图基础

史密斯圆图是反射系数(伽马，以符号Γ表示)的极座标图。反射系数也可以从数学上定义为单端口散射参数，即 s_{11}。

我们知道反射系数定义为反射波电压与入射波电压之比:

负载反射信号的强度取决于信号源阻抗与负载阻抗的失配程度。反射系数的表达式定义为：

$$\Gamma_L = \frac{V_{refl}}{V_{inc}} = \frac{Z_L - Z_O}{Z_L + Z_O} = \Gamma_r + j \cdot \Gamma_i \qquad (1)$$

由于阻抗是复数，反射系数也是复数。

为了减少未知参数的数量，可以固化一个经常出现并且在应用中经常使用的参数。这里 Zo (特性阻抗)通常为常数并且是实数，是常用的归一化标准值，如 50Ω、75Ω、100Ω 和 600Ω。于是我们可以定义归一化的负载阻抗：

$$z = Z_L / Z_O = (R + jX) / Z_O = r + jx \qquad (2)$$

据此，将反射系数的公式重新写为：

$$\Gamma_L = \Gamma_r + j \cdot \Gamma_i = \frac{Z_L - Z_O}{Z_L + Z_O} = \frac{(Z_L - Z_O)/Z_O}{(Z_L + Z_O)/Z_O} = \frac{z-1}{z+1} = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1} \qquad (3)$$

从上式我们可以看到负载阻抗与其反射系数间的直接关系。但是这个关系式是一个复数，所以并不实用。我们可以把史密斯圆图当作上述方程的图形表示。

为了建立圆图，方程必需重新整理以符合标准几何图形的形式(如圆或射线)。

首先，由方程 2.3 求解出；

$$z = r + jx = \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} = \frac{1+\Gamma_r + j\Gamma_i}{1-\Gamma_r - j\Gamma_i} \quad （4）$$

并且

$$r = \frac{1-\Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{1+\Gamma_r^2 - 2\cdot\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad （5）$$

令等式 2.5 的实部和虚部相等，得到两个独立的关系式：

$$r = \frac{1-\Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{1+\Gamma_r^2 - 2\cdot\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad （6）$$

$$x = \frac{2\cdot\Gamma_i}{1+\Gamma_r^2 - 2\cdot\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad （7）$$

重新整理等式（6），经过等式（8）至（13）到最终的方程（14）。这个方程是在复平面(Γr, Γi)上、圆的参数方程(x-a)2 + (y-b)2 = R2，它以(r/r+1, 0)为圆心，半径为 1/1+r。参见图 4a。

$$r + r\cdot\Gamma_r^2 - 2\cdot r\cdot\Gamma_r + r\cdot\Gamma_i^2 = 1-\Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 \quad （8）$$

$$\Gamma_r^2 + r\cdot\Gamma_r^2 - 2\cdot r\cdot\Gamma_r + r\cdot\Gamma_i^2 + \Gamma_i^2 = 1-r \quad （9）$$

$$(1+r)\cdot\Gamma_r^2 - 2\cdot r\cdot\Gamma_r + (r+1)\cdot\Gamma_i^2 = 1-r \quad （10）$$

$$\Gamma_r^2 - \frac{2\cdot r}{r+1}\cdot\Gamma_r + \Gamma_i^2 = \frac{1-r}{1+r} \quad （11）$$

$$\Gamma_r^2 - \frac{2\cdot r}{r+1}\cdot\Gamma_r + \frac{r^2}{(r+1)^2} + \Gamma_i^2 - \frac{r^2}{(r+1)^2} = \frac{1-r}{1+r} \quad （12）$$

$$(\Gamma_r - \frac{r}{r+1})^2 + \Gamma_i^2 = \frac{1-r}{1+r} + \frac{r^2}{(1+r)^2} = \frac{1}{(1+r)^2} \quad （13）$$

$$(\Gamma_r - \frac{r}{r+1})^2 + \Gamma_i^2 = (\frac{1}{1+r})^2 \quad （14）$$

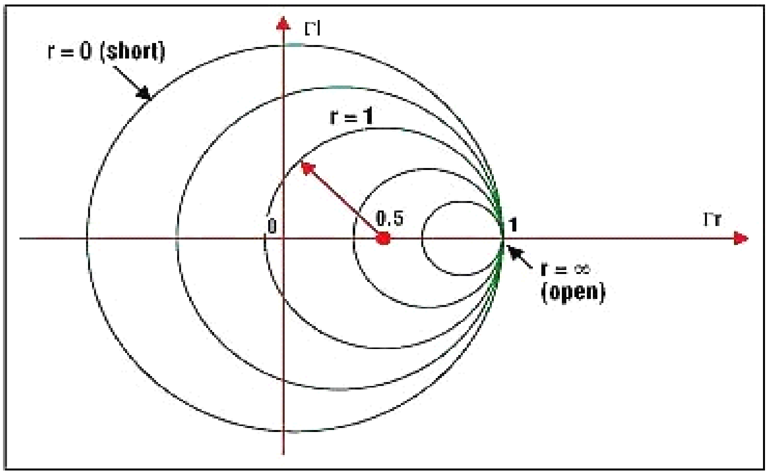

图 4a. 圆周上的点表示具有相同实部的阻抗。

例如，R＝1 的圆，以(0.5, 0)为圆心，半径为 0.5。它包含了代表反射零点的原点(0, 0) (负载与特性阻抗相匹配）。以(0，0)为圆心、半径为 1 的圆代表负载短路。负载开路时，圆退化为一个点(以 1，0 为圆心，半径为零)。与此对应的是最大的反射系数 1，即所有的入射波都被反射回来。

在作史密斯圆图时，有一些需要注意的问题。下面是最重要的几个方面：

- 所有的圆周只有一个相同的，唯一的交点(1, 0)。
- 代表 0Ω、也就是没有电阻(r = 0)的圆是最大的圆。
- 无限大的电阻对应的圆退化为一个点(1, 0)
- 实际中没有负的电阻，如果出现负阻值，有可能产生振荡。
- 选择一个对应于新电阻值的圆周就等于选择了一个新的电阻。

同时，经过等式（15）至（18）的变换，（7）式可以推导出另一个参数方程，方程（19）。

$$x + x\cdot\Gamma_r^2 - 2\cdot x\cdot\Gamma_r + x\cdot\Gamma_i^2 = 2\cdot\Gamma_i \qquad (15)$$

$$1 + \Gamma_r^2 - 2\cdot\Gamma_r + \Gamma_i^2 = 2\cdot\Gamma_i / x \qquad (16)$$

$$\Gamma_r^2 - 2\cdot\Gamma_r + 1 + \Gamma_i^2 - \frac{2}{x}\cdot\Gamma_i = 0 \qquad (17)$$

$$\Gamma_r^2 - 2\cdot\Gamma_r + 1 + \Gamma_i^2 - \frac{2}{x}\Gamma_i + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \qquad (18)$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i - \frac{1}{x})^2 = \frac{1}{x^2} \qquad (19)$$

同样，式（19）也是在复平面(Γr, Γi)上的圆的参数方程(x-a)2 + (y-b)2 = R2,它的圆心为(1, 1/x)，半径 1/x。参见图 4b。

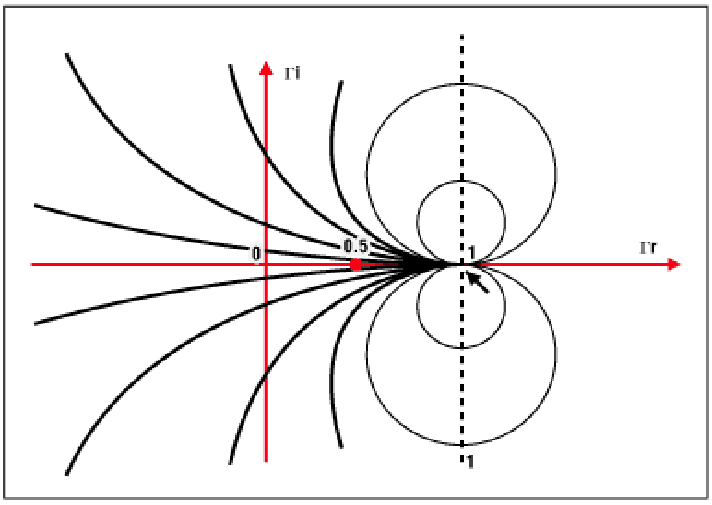

图 4b. 圆周上的点表示具有相同虚部 x 的阻抗。

例如，x=1 的圆以(1, 1)为圆心，半径为 1。所有的圆(x 为常数)都包括点(1, 0)。与实部圆周不同的是，x 既可以是正数也可以是负数。这说明复平面下半部是其上半部的镜像。所有圆的圆心都在一条经过横轴上 1 点的垂直线上。

为了完成史密斯圆图，我们将两簇圆周放在一起。可以发现一簇圆周的所有圆会与另一簇圆周的所有圆相交。若已知阻抗为 r + jx，只需要找到对应于 r 和 x 的两个圆周的交点就可以得到相应的反射系数。

上述过程是可逆的，如果已知反射系数，可以找到两个圆周的交点从而读取相应的 r 和 x 的值。

过程如下：

- 确定阻抗在史密斯圆图上的对应点

- 找到与此阻抗对应的反射系数 (Γ)

因为史密斯圆图是一种基于图形的解法，所得结果的精确度直接依赖于图形的精度。

举例

下面是一个用史密斯圆图表示的 RF 应用实例：

例：已知特性阻抗为 50Ω，负载阻抗如下：

Z1 = 100 + j50

Z2 = 75 -j100

Z3 = j200

Z4 = 150

Z5 = ∞(开路)

Z6 = 0 (短路)

Z7 = 50

Z8 = 184 -j900

对上面的值进行归一化并标示在圆图中(见图 5)：

z1 = 2 + j

z2 = 1.5 -j2

z3 = j4

z4 = 3

z5 = 8

z6 = 0

z7 = 1

z8 = 3.68 -j18S

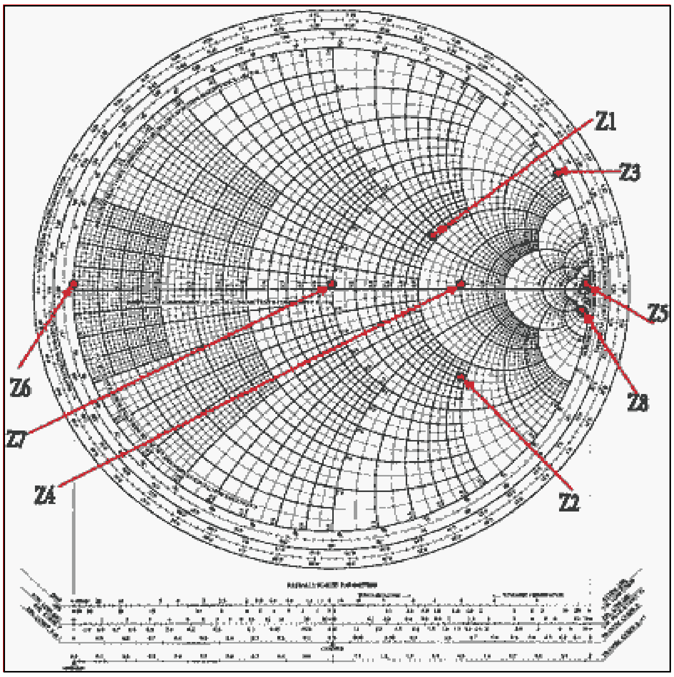

图 5. 史密斯圆图上的点

现在可以通过图 5 的圆图直接解出反射系数Γ。画出阻抗点(等阻抗圆和等电抗圆的交点)，只要读出它们在直角坐标水平轴和垂直轴上的投影，就得到了反射系数的实部Γr 和虚部Γi (见图 6)。

该范例中可能存在八种情况，在图 6 所示史密斯圆图上可以直接得到对应的反射系数 Γ：

$\Gamma 1 = 0.4 + 0.2j$

$\Gamma 2 = 0.51 - 0.4j$

$\Gamma 3 = 0.875 + 0.48j$

$\Gamma 4 = 0.5$

$\Gamma 5 = 1$

$\Gamma 6 = -1$

$\Gamma 7 = 0$

$\Gamma 8 = 0.96 - 0.1j$

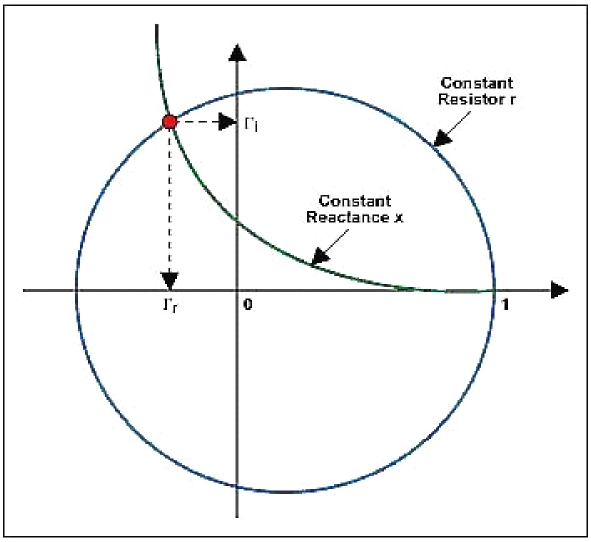

图 6. 从 X-Y 轴直接读出反射系数Γ的实部和虚部